МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ТУЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт *горного дела и строительства*

Кафедра *Строительства, строительных материалов и конструкций*

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к выполнению расчётно-графической работы
по дисциплине

«Современные методы расчета строительных конструкций»

Уровень профессионального образования: *высшее образование – бакалавриат*
Направление подготовки: *08.03.01 Строительство*

Профиль подготовки:

Промышленное и гражданское строительство

Квалификация выпускника: *бакалавр*

Тула *2019*

Методические указания к выполнению расчетно-графической работы составлены доцентом Судаковой И.А. и обсуждены на заседании кафедры ССМиК института горного дела и строительства (протокол заседания кафедры №_ _ от «_ _ _» _ _ _ _ _ _ _ 20_ _ _ _ г.)

Зав. кафедрой_____ А.А.Трещев

ВВЕДЕНИЕ

1 Общие замечания

При изучении дисциплин кафедры наибольшие трудности у студентов возникают при решении практических задач.

Вместе с тем именно решение задач в значительной степени способствует развитию инженерного мышления у студентов, приобретению ими необходимых навыков расчетов элементов инженерных конструкций. В настоящей методической разработке подробно рассмотрены решения задач по дисциплине «Современные методы расчета строительных конструкций», а также изложены требования по выполнению и оформлению РГР, предусмотренной рабочей программой курса для студентов.

1.2 Основные требования по выполнению РГР

1.2.1 Оформление титульного листа

РГР выполняется на стандартных листах бумаги с размерами 210 х 297 мм, скрепленных в тетрадь. Титульный лист оформляется в соответствии с требованиями ЕСКД. Все надписи на титульном листе располагаются в строго определенных местах, выполняются чертежным шрифтом или в компьютерном варианте.

Титульный лист содержит следующие надписи:

Министерство образования и науки РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Тульский государственный университет»
Институт горного дела и строительства
Кафедра «Строительство, строительные материалы и конструкции»

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА
по дисциплине
«Современные методы расчета строительных конструкций»

по теме:
«РАСЧЕТ ПЛОСКИХ ШАРНИРНО-СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ»

Выполнил студент гр. _____ _____(Ф.И.О.)_____ __(дата)__ _(подпись)_

Проверил (науч. звание, должность) _____(Ф.И.О.)_____ __(дата)__ _(подпись)_

Тула 20__ г.

1.2.2 Оформление расчетно-пояснительной записки

Расчетно-пояснительная записка должна быть достаточно краткой, без лишних подробных пояснений и теоретических выводов, имеющихся в учебниках и других учебных пособиях, но не чересчур краткой, содержащей один только формулы и вычисления. В расчетно-пояснительной записке от начала до конца должна четко прослеживаться логическая связь выполняемых операций, а также должны быть отмечены основания для выполнения этих операций. Приведенные в настоящей методической разработке примеры решения отдельных задач могут послужить основой для составления записок.

Формулы, приводимые в записке, должны быть, как правило, записаны сначала в общем виде, а затем уже должна быть произведена подстановка исходных данных и выполнены необходимые вычисления. При подстановке исходных данных нужно внимательно следить

за соблюдением одинаковой размерности. После получения значения искомой (промежуточной или окончательной) величины обязательно проставляется ее размерность.

Все записи в расчетно-пояснительной записке ведутся чернилами на одной стороне листа писчей бумаги четкими разборчивым почерком.

На каждой странице оставляются поля: слева шириной 25 мм – для скрепления листов в тетрадь, и справа – 10мм.

Если у автора работы неразборчивый почерк, то записку он должен выполнять чертежным шрифтом.

Все страницы РГР должны быть последовательно пронумерованы в правой верхней части страницы арабскими цифрами. Нумерация страниц должна быть сквозной от титульного листа до последней страницы, включая чертежи (схемы). На титульном листе, который является первой страницей, номер страницы не ставится, хотя и подразумевается.

1.2.3 Выполнение графической части работы

Рисунки и чертежи в тексте пояснительной записки вычерчиваются в масштабе, с простановкой необходимых размеров. Эпюры внутренних усилий должны вычерчиваться строго под расчетной схемой (или рядом с ней). На расчетной схеме должны быть отмечены все сечения, для которых, определяются внутренние усилия; на эпюрах обязательно проставляются значения вычисленных характерных ординат. Эпюры заштриховываются тонкими линиями перпендикулярно оси элемента конструкции.

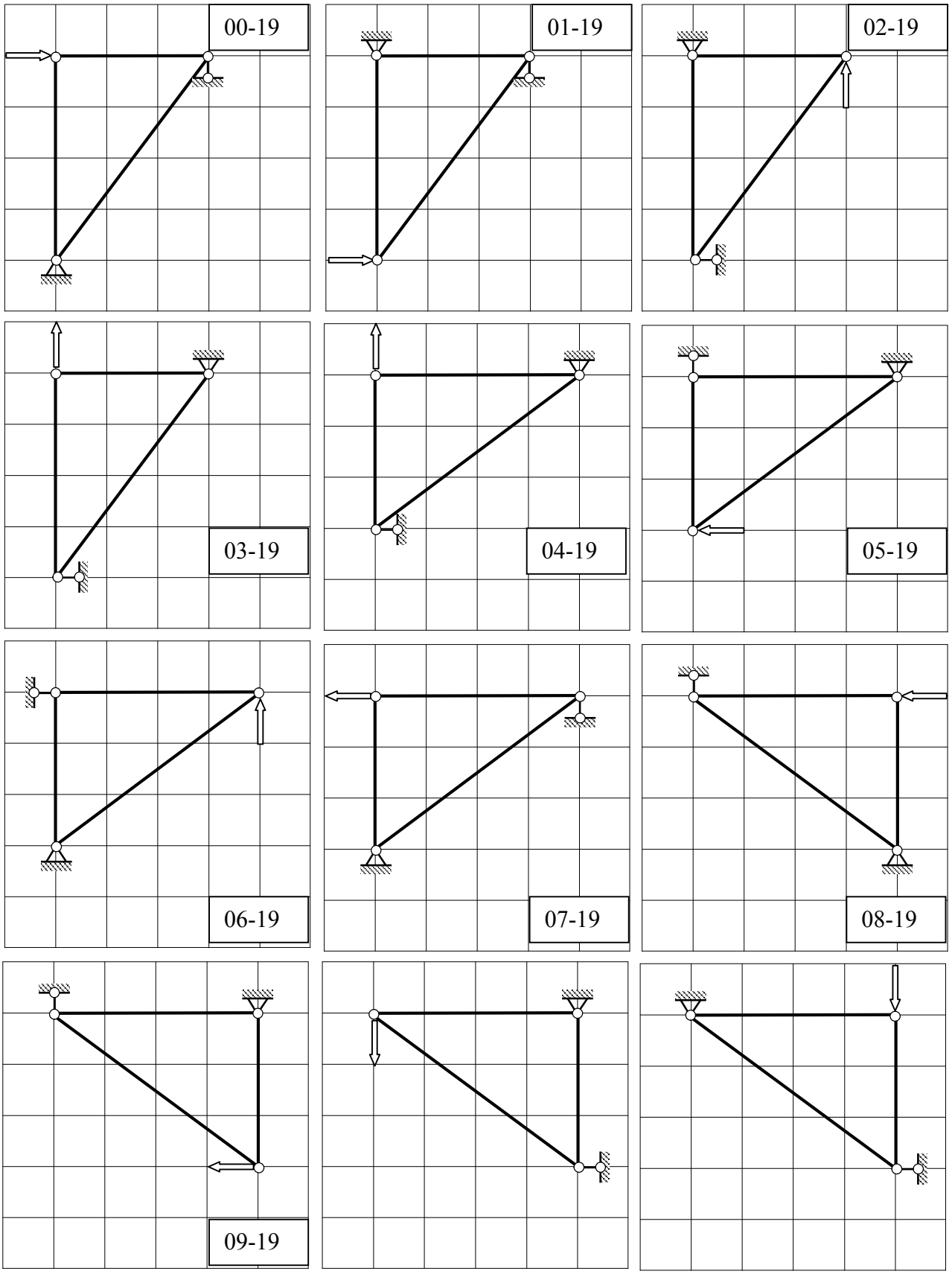
1.2.4 Защита РГР

РГР выполняется в течение семестра и оценивается после проверки работы преподавателем. Бальная оценка выставляется в соответствии с пунктом 7 рабочей программы по этой дисциплине.

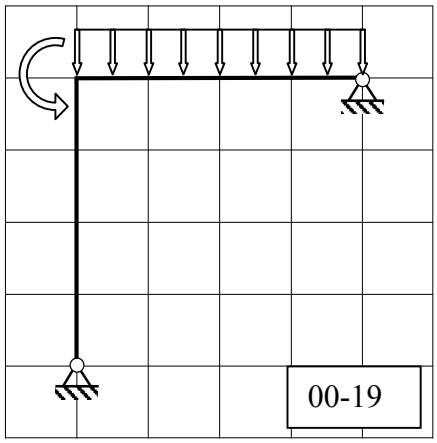
Каждым студентом РГР должна выполняться и сдаваться на проверку преподавателю в сроки, предусмотренные графиком работы студентов в текущем семестре.

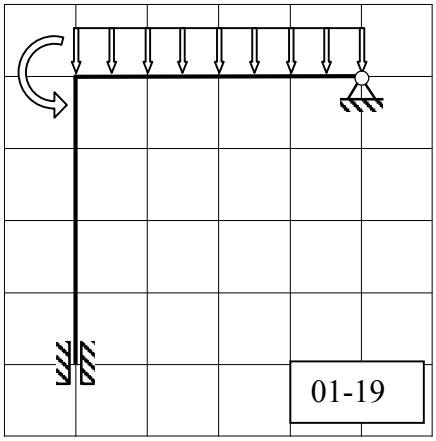
2. Задания для выполнения РГР (размеры ЗРС и внешние нагрузки принять любыми)

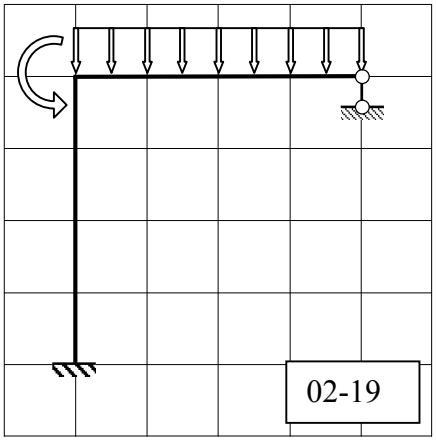
2.1. Задание для расчета фермы методом конечных элементов

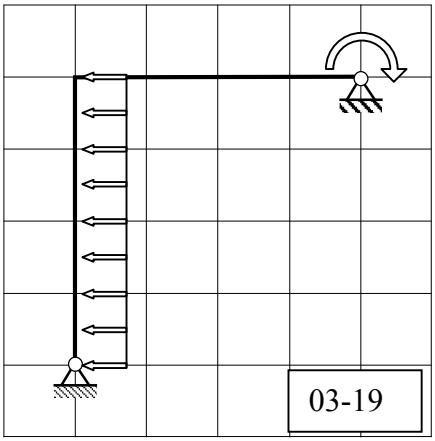


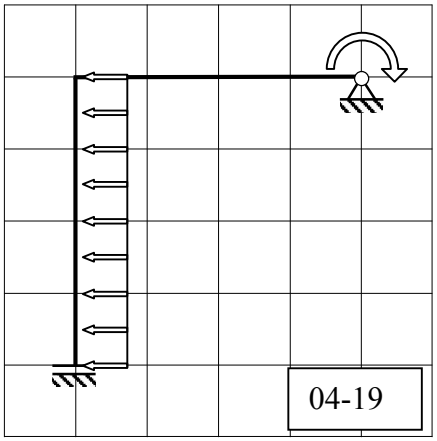
2.2. Задание для расчета рамы методом конечных элементов

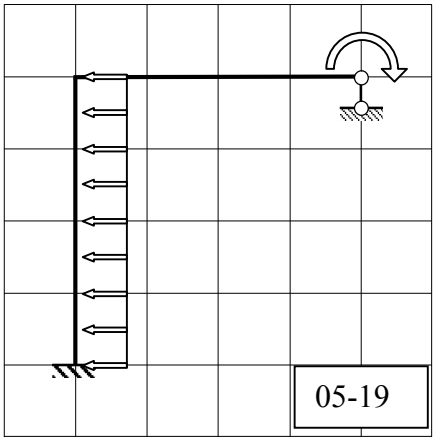


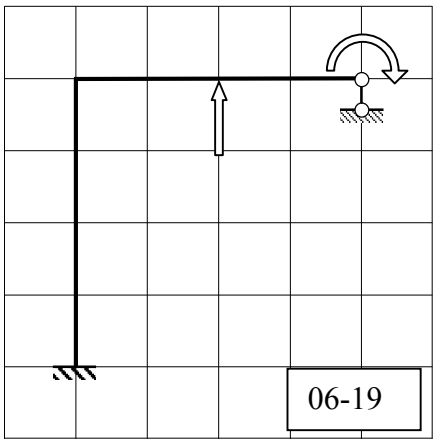


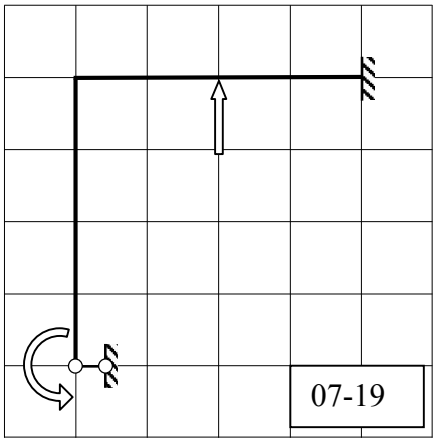


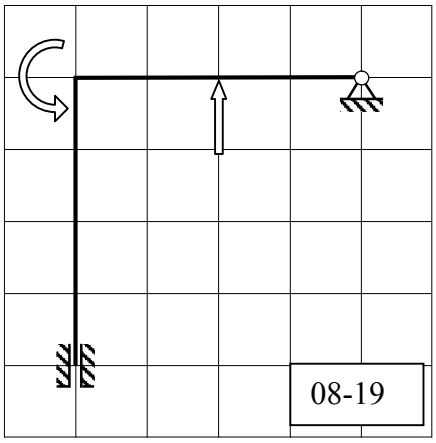


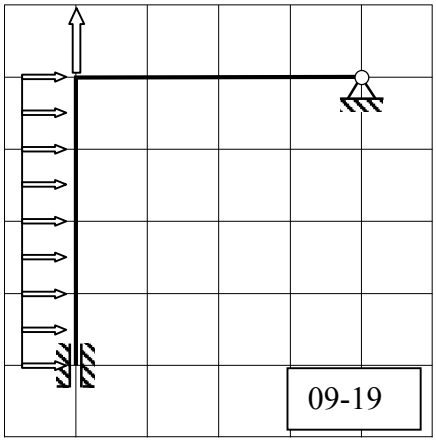


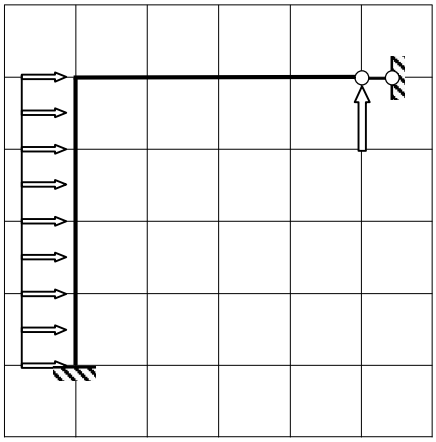


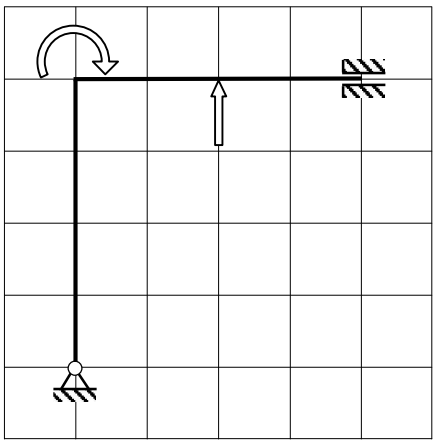












3. Решение и оформление типовых задач.

СОДЕРЖАНИЕ:

Задание.....….....

1. Разработка схемы дискретизации.....….....

2. Обработка узлов дискретизации в глобальной системе координат.....……..

3. Формирование матриц жёсткости в глобальной системе координат.....

4. Формирование матрицы жёсткости для ансамбля конечных элементов в глобальной системе координат.....……

5. Разрешающее уравнение метода.....…

6. Формирование матрицы узловых перемещений конечных элементов в локальной системе координат.....…….

7. Вычисляем усилия в стержнях фермы.....…..

8. Проверка равновесия узлов фермы.....……

Вывод.....

На рис.1 приведена ЗРС фермы. На этом примере требуется определить усилия в стержнях фермы, опорные реакции и перемещения узлов.

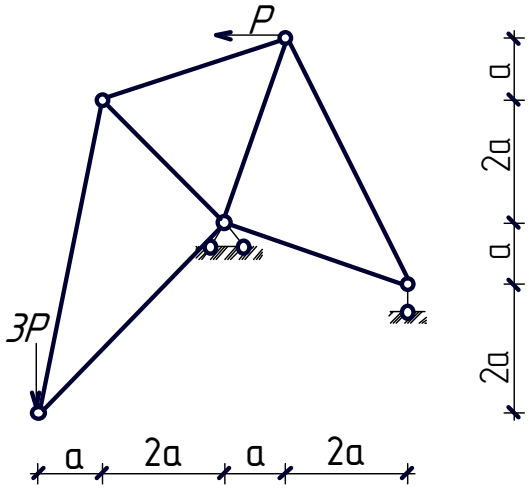


Рис.1. ЗРС фермы.

1. Разработка схемы дискретизации.

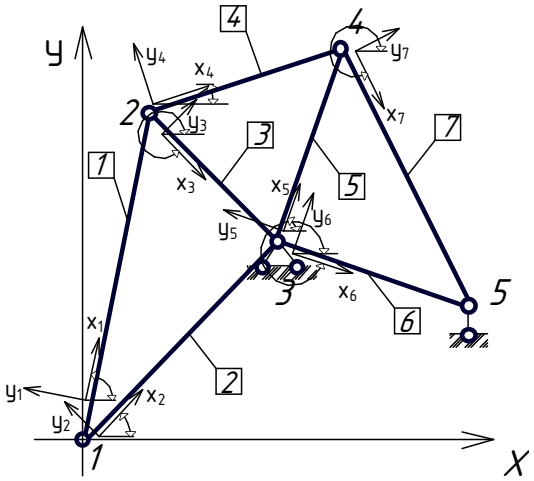


Рис.2. Схема дискретизации.

2. Обработка узлов дискретизации в глобальной системе координат.

Таблица 1

Координаты узлов дискретизации

№ узла	1	2	3	4	5
x, a	0	1	3	4	6
y, a	0	5	3	6	2

Определение вспомогательных величин проводят по формулам аналитической геометрии:

$$l_{ij} = \sqrt{\left(X_j - X_i\right)^2 + \left(Y_j - Y_i\right)^2};$$

$$cos\,\varphi_{ij} = \frac{X_j - X_i}{l_{ij}};$$

$$sin\,\varphi_{ij} = \frac{Y_j - Y_i}{l_{ij}}.$$

Вычисления заносят в таблицу 2.

Таблица 2

Обработка узлов дискретизации

№ КЭ	i	j	l_k, a	$\cos\varphi_k$	$\sin\varphi_k$
1	1	2	$\sqrt{26}$	$1/\sqrt{26}$	$5/\sqrt{26}$
2	1	3	$3\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
3	2	3	$2\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$
4	2	4	$\sqrt{10}$	$3/\sqrt{10}$	$1/\sqrt{10}$
5	3	4	$\sqrt{10}$	$1/\sqrt{10}$	$3/\sqrt{10}$
6	3	5	$\sqrt{10}$	$3/\sqrt{10}$	$-1/\sqrt{10}$
7	4	5	$2\sqrt{5}$	$1/\sqrt{5}$	$-2/\sqrt{5}$

Матрицы преобразования имеют вид:

$$(p)_k = \begin{pmatrix} \cos\varphi_k & 0 \\ \sin\varphi_k & 0 \\ 0 & \cos\varphi_k \\ 0 & \sin\varphi_k \end{pmatrix};$$

$$(p)_1 = \frac{1}{\sqrt{26}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}; (p)_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; (p)_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; (p)_4 = \frac{1}{\sqrt{1}}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(p)_5 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; (p)_6 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; (p)_7 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

3. Формирование матриц жесткости в глобальной системе координат.

В локальной системе координат матрица жесткости отдельного КЭ имеет вид:

$$\left[k_k^{л}\right] = \frac{E \cdot F}{l_k}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\left[k_1^{л}\right] = \frac{EF}{a\sqrt{26}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \left[k_2^{л}\right] = \frac{EF}{3a\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \left[k_3^{л}\right] = \frac{EF}{2a\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\left[k_4^{л}\right] = \left[k_5^{л}\right] = \left[k_6^{л}\right] = \frac{EF}{a\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \left[k_7^{л}\right] = \frac{EF}{2a\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрицы жесткости из локальной системы координат преобразовываются в глобальную систему координат по формуле:

$$\left[k_k^{Г}\right]=(p)_k\cdot\left[k_k^{л}\right]\cdot(p)_k^T.$$

$$\left[k_1^{Г}\right]=\frac{1}{\sqrt{26}}\begin{pmatrix}1&0\\5&0\\0&1\\0&5\end{pmatrix}\cdot\frac{EF}{a\sqrt{26}}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{26}}\begin{pmatrix}1&5&0&0\\0&0&1&5\end{pmatrix}=\frac{EF}{26a\sqrt{26}}\begin{bmatrix}1&5&-1&-5\\5&25&-5&-25\\-1&-5&1&5\\-5&-25&5&25\end{bmatrix};$$

$$\left[k_2^{Г}\right]=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0\\1&0\\0&1\\0&1\end{pmatrix}\cdot\frac{EF}{3a\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}=\frac{EF}{6a\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&1&-1&-1\\1&1&-1&-1\\-1&-1&1&1\\-1&-1&1&1\end{bmatrix};$$

$$\left[k_3^{Г}\right]=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\\0&1\\0&-1\end{pmatrix}\cdot\frac{EF}{2a\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&0&1&-1\end{pmatrix}=\frac{EF}{4a\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&-1&-1&1\\-1&1&1&-1\\-1&1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix};$$

$$\left[k_4^{Г}\right]=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}3&0\\1&0\\0&3\\0&1\end{pmatrix}\cdot\frac{EF}{a\sqrt{10}}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}3&1&0&0\\0&0&3&1\end{pmatrix}=\frac{EF}{10a\sqrt{10}}\begin{bmatrix}9&3&-9&-3\\3&1&-3&-1\\-9&-3&9&3\\-3&-1&3&1\end{bmatrix};$$

$$\left[k_5^{Г}\right]=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1&0\\3&0\\0&1\\0&3\end{pmatrix}\cdot\frac{EF}{a\sqrt{10}}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1&3&0&0\\0&0&1&3\end{pmatrix}=\frac{EF}{10a\sqrt{10}}\begin{bmatrix}1&3&-1&-3\\3&9&-3&-9\\-1&-3&1&3\\-3&-9&3&9\end{bmatrix};$$

$$\left[k_6^{Г}\right]=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}3&0\\-1&0\\0&3\\0&-1\end{pmatrix}\cdot\frac{EF}{a\sqrt{10}}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}3&-1&0&0\\0&0&3&-1\end{pmatrix}=\frac{EF}{10a\sqrt{10}}\begin{bmatrix}9&-3&-9&3\\-3&1&-3&-1\\-9&3&9&-3\\3&-1&-3&1\end{bmatrix};$$

$$\left[k_7^{Г}\right]=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1&0\\-2&0\\0&1\\0&-2\end{pmatrix}\cdot\frac{EF}{2a\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1&-2&0&0\\0&0&1&-2\end{pmatrix}=\frac{EF}{10a\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1&-2&-1&2\\-2&4&-2&-4\\-1&2&1&-2\\2&-4&-2&4\end{bmatrix};$$

Формирование матрицы жесткости для ансамбля КЭ в ГСК.

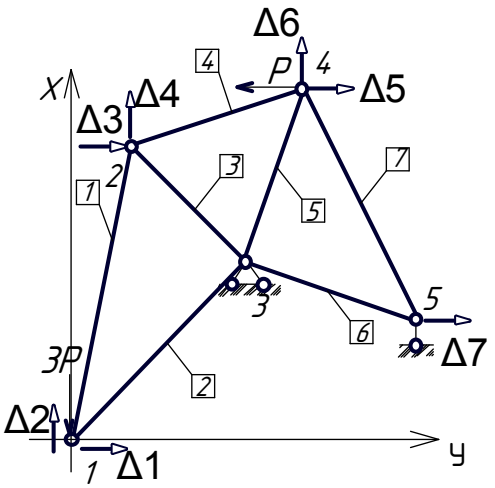
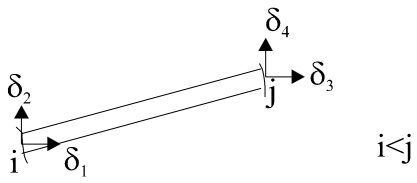


Рис. 3 Векторы перемещений в глобальной системе координат

Таблица 3

Матрица индексов ансамбля КЭ

№ КЭ				
	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4
1	1	2	3	4
2	1	2	0	0
3	3	4	0	0
4	3	4	5	6
5	0	0	5	6
6	0	0	7	0
7	5	6	7	0

Формирование матрицы жесткости.

Матрица жесткости ансамбля КЭ имеет размер 7x7 (по числу независимых перемещений в матрице индексов):

$$[K]=\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} & K_{17} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} & K_{27} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} & K_{37} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} & K_{47} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} & K_{57} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} & K_{67} \\ K_{71} & K_{72} & K_{73} & K_{74} & K_{75} & K_{76} & K_{77} \end{bmatrix}$$

Элементы матрицы вычисляются по формулам:

$$K_{11}=k^{\Gamma}_{1,11}+k^{\Gamma}_{2,11}=\frac{EF}{26a\sqrt{26}}(1)+\frac{EF}{6a\sqrt{2}}(1)=0{,}1253\frac{EF}{a};$$

$$K_{12} = k_{1,12}^{\Gamma} + k_{2,12}^{\Gamma} = \frac{EF}{26a\sqrt{26}}(5) + \frac{EF}{6a\sqrt{2}}(1) = 0{,}1555\frac{EF}{a};$$

$$K_{13} = k_{1,13}^{\Gamma} = \frac{EF}{26a\sqrt{26}}(-1) = -0{,}0075\frac{EF}{a};$$

$$K_{14} = k_{1,14}^{\Gamma} = \frac{EF}{26a\sqrt{26}}(-5) = -0{,}0377\frac{EF}{a};$$

$$K_{15} = K_{16} = K_{17} = 0;$$

$$K_{22} = k_{1,22}^{\Gamma} + k_{2,22}^{\Gamma} = \frac{EF}{26a\sqrt{26}}(25) + \frac{EF}{6a\sqrt{2}}(1) = 0{,}3064\frac{EF}{a};$$

$$K_{23} = k_{1,23}^{\Gamma} = \frac{EF}{26a\sqrt{26}}(-5) = -0{,}0377\frac{EF}{a};$$

$$K_{24} = k_{1,24}^{\Gamma} = \frac{EF}{26a\sqrt{26}}(-25) = -0{,}1885\frac{EF}{a};$$

$$K_{25} = K_{26} = K_{27} = 0;$$

$$K_{33} = k_{1,33}^{\Gamma} + k_{3,33}^{\Gamma} + k_{4,11}^{\Gamma} = \frac{EF}{26a\sqrt{26}}(1) + \frac{EF}{4a\sqrt{2}}(1) + \frac{EF}{10a\sqrt{10}}(9) = 0{,}4689\frac{EF}{a};$$

$$K_{34} = k_{1,34}^{\Gamma} + k_{3,12}^{\Gamma} + k_{4,12}^{\Gamma} = \frac{EF}{26a\sqrt{26}}(5) + \frac{EF}{4a\sqrt{2}}(-1) + \frac{EF}{10a\sqrt{10}}(3) = -0{,}0441\frac{EF}{a};$$

$$K_{35} = k_{4,13}^{\Gamma} = \frac{EF}{10a\sqrt{10}}(-9) = -0{,}2846\frac{EF}{a};$$

$$K_{36} = k_{4,14}^{\Gamma} = \frac{EF}{10a\sqrt{10}}(-3) = -0{,}0948\frac{EF}{a};$$

$$K_{37} = 0;$$

$$K_{44} = k_{1,44}^{\Gamma} + k_{3,22}^{\Gamma} + k_{4,22}^{\Gamma} = \frac{EF}{26a\sqrt{26}}(25) + \frac{EF}{4a\sqrt{2}}(1) + \frac{EF}{10a\sqrt{10}}(1) = 0{,}3969\frac{EF}{a};$$

$$K_{45} = k_{4,23}^{\Gamma} = \frac{EF}{10a\sqrt{10}}(-3) = -0{,}0948\frac{EF}{a};$$

$$K_{46} = k_{4,24}^{\Gamma} = \frac{EF}{10a\sqrt{10}}(-1) = -0{,}0316\frac{EF}{a};$$

$$K_{47} = 0;$$

$$K_{55} = k_{4,33}^{\Gamma} + k_{5,33}^{\Gamma} + k_{7,11}^{\Gamma} = \frac{EF}{10a\sqrt{10}}(9) + \frac{EF}{10a\sqrt{10}}(1) + \frac{EF}{10a\sqrt{5}}(1) = 0{,}3609\frac{EF}{a};$$

$$K_{56} = k_{4,34}^{\Gamma} + k_{5,34}^{\Gamma} + k_{7,12}^{\Gamma} = \frac{EF}{10a\sqrt{10}}(3) + \frac{EF}{10a\sqrt{10}}(3) + \frac{EF}{10a\sqrt{5}}(-2) = 0{,}1003\frac{EF}{a};$$

$$K_{57} = k_{7,13}^{\Gamma} = \frac{EF}{10a\sqrt{5}}(-1) = -0{,}0447\frac{EF}{a};$$

$$K_{66} = k_{4,44}^{\Gamma} + k_{5,44}^{\Gamma} + k_{7,22}^{\Gamma} = \frac{EF}{10a\sqrt{10}}(1) + \frac{EF}{10a\sqrt{10}}(9) + \frac{EF}{10a\sqrt{5}}(4) = 0{,}4951\frac{EF}{a};$$

$$K_{67} = k_{7,23}^{\Gamma} = \frac{EF}{10a\sqrt{5}}(2) = 0{,}0894\frac{EF}{a};$$

$$K_{77} = k_{6,33}^{\Gamma} + k_{7,33}^{\Gamma} = \frac{EF}{10a\sqrt{10}}(9) + \frac{EF}{10a\sqrt{10}}(4) = 0{,}3293\frac{EF}{a};$$

4. Разрешающие уравнения метода конечных элементов.

$$-[K]\cdot\{\Delta\}+\{P\}=\{0\}.$$

$$\{P\}=P\begin{Bmatrix}0\\-3\\0\\0\\-1\\0\\0\end{Bmatrix}$$ - вектор внешних нагрузок.

$$-\frac{EF}{a}\begin{bmatrix}0{,}1253 & 0{,}1555 & -0{,}0075 & -0{,}0377 & 0 & 0 & 0\\ 0{,}1555 & 0{,}3064 & -0{,}0377 & -0{,}1885 & 0 & 0 & 0\\ -0{,}0075 & -0{,}0377 & 0{,}4689 & -0{,}0441 & -0{,}2846 & -0{,}0948 & 0\\ -0{,}0377 & -0{,}1885 & -0{,}0441 & 0{,}3969 & -0{,}0948 & -0{,}0316 & 0\\ 0 & 0 & -0{,}2846 & -0{,}0948 & 0{,}3609 & 0{,}1003 & -0{,}0447\\ 0 & 0 & -0{,}0948 & -0{,}0316 & 0{,}1003 & 0{,}4951 & -0{,}0894\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}0447 & -0{,}0894 & 0{,}3293\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}\Delta1\\\Delta2\\\Delta3\\\Delta4\\\Delta5\\\Delta6\\\Delta7\end{Bmatrix}+P\begin{Bmatrix}0\\-3\\0\\0\\-1\\0\\0\end{Bmatrix}=\{0\}.$$

Решение СЛАУ

$$\frac{EF}{a}\begin{bmatrix}0{,}1253 & 0{,}1555 & -0{,}0075 & -0{,}0377 & 0 & 0 & 0\\ 0{,}1555 & 0{,}3064 & -0{,}0377 & -0{,}1885 & 0 & 0 & 0\\ -0{,}0075 & -0{,}0377 & 0{,}4689 & -0{,}0441 & -0{,}2846 & -0{,}0948 & 0\\ -0{,}0377 & -0{,}1885 & -0{,}0441 & 0{,}3969 & -0{,}0948 & -0{,}0316 & 0\\ 0 & 0 & -0{,}2846 & -0{,}0948 & 0{,}3609 & 0{,}1003 & -0{,}0447\\ 0 & 0 & -0{,}0948 & -0{,}0316 & 0{,}1003 & 0{,}4951 & 0{,}0894\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}0447 & 0{,}0894 & 0{,}3293\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}\Delta1\\\Delta2\\\Delta3\\\Delta4\\\Delta5\\\Delta6\\\Delta7\end{Bmatrix}=P\begin{Bmatrix}0\\-3\\0\\0\\-1\\0\\0\end{Bmatrix}.$$

Получим:

$$\Delta_1=128{,}859\frac{Pa}{EF},\ \Delta_2=-122{,}441\frac{Pa}{EF},\ \Delta_3=-51{,}687\frac{Pa}{EF},\ \Delta_4=-66{,}472\frac{Pa}{EF},$$

$$\Delta_5=-62{,}015\frac{Pa}{EF},\ \Delta_6=-0{,}059\frac{Pa}{EF},\ \Delta_7=-8{,}402\frac{Pa}{EF}$$

Формирование матрицы узловых перемещений КЭ в ЛСК.

Так как перемещения в ЛСК связаны с перемещениями в ГСК, то потребуются составляющие векторов узловых перемещений в ГСК для каждого КЭ. Используя решение системы уравнений МКЭ с учетом данных таблицы индексов (табл.3), можно записать:

$$\{\delta_1^Г\}=\begin{Bmatrix}128{,}86\\-122{,}44\\-51{,}69\\-66{,}47\end{Bmatrix}\frac{Pa}{EF};\{\delta_2^Г\}=\begin{Bmatrix}128{,}86\\-122{,}44\\0\\0\end{Bmatrix}\frac{Pa}{EF};\{\delta_3^Г\}=\begin{Bmatrix}-51{,}69\\-66{,}47\\0\\0\end{Bmatrix}\frac{Pa}{EF};$$

$$\{\delta_1^Г\}=\begin{Bmatrix}-51{,}69\\-66{,}47\\-62{,}02\\-0{,}059\end{Bmatrix}\frac{Pa}{EF};\{\delta_1^Г\}=\begin{Bmatrix}0\\0\\-62{,}02\\-0{,}059\end{Bmatrix}\frac{Pa}{EF};\{\delta_6^Г\}=\begin{Bmatrix}0\\0\\-8{,}402\\0\end{Bmatrix}\frac{Pa}{EF};$$

$$\{\delta_6^Г\}=\begin{Bmatrix}-62{,}02\\-0{,}059\\-8{,}402\\0\end{Bmatrix}\frac{Pa}{EF}.$$

$$\{\delta_1^л\}=(p)_1^T\cdot\{\delta_1^Г\}=\frac{1}{\sqrt{26}}\begin{pmatrix}1&5&0&0\\0&0&1&5\end{pmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}128{,}86\\-122{,}44\\-51{,}69\\-66{,}47\end{Bmatrix}\frac{Pa}{EF}=\frac{Pa}{EF}\begin{Bmatrix}-94{,}79\\-75{,}32\end{Bmatrix};$$

$$\{\delta_2^л\}=(p)_2^T\cdot\{\delta_2^Г\}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}128{,}86\\-122{,}44\\0\\0\end{Bmatrix}\frac{Pa}{EF}=\frac{Pa}{EF}\begin{Bmatrix}4{,}54\\0\end{Bmatrix};$$

$$\{\delta_3^л\}=(p)_3^T\cdot\{\delta_3^Г\}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&0&1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}-51{,}69\\-66{,}47\\0\\0\end{Bmatrix}\frac{Pa}{EF}=\frac{Pa}{EF}\begin{Bmatrix}10{,}45\\0\end{Bmatrix};$$

$$\{\delta_4^л\}=(p)_4^T\cdot\{\delta_4^Г\}=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}3&1&0&0\\0&0&3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}-51{,}69\\-66{,}47\\-62{,}02\\-0{,}059\end{Bmatrix}\frac{Pa}{EF}=\frac{Pa}{EF}\begin{Bmatrix}-70{,}06\\-58{,}85\end{Bmatrix};$$

$$\{\delta_5^л\}=(p)_5^T\cdot\{\delta_5^Г\}=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1&3&0&0\\0&0&1&3\end{pmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}0\\0\\-62{,}02\\-0{,}059\end{Bmatrix}\frac{Pa}{EF}=\frac{Pa}{EF}\begin{Bmatrix}0\\-19{,}67\end{Bmatrix};$$

$$\left\{\delta_6^{л}\right\}=(p)_6^T\cdot\left\{\delta_6^{Г}\right\}=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}3 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}0\\0\\-8{,}402\\0\end{Bmatrix}\frac{Pa}{EF}=\frac{Pa}{EF}\begin{Bmatrix}0\\-7{,}971\end{Bmatrix};$$

$$\left\{\delta_7^{л}\right\}=(p)_7^T\cdot\left\{\delta_7^{Г}\right\}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}-62{,}02\\-0{,}059\\-8{,}402\\0\end{Bmatrix}\frac{Pa}{EF}=\frac{Pa}{EF}\begin{Bmatrix}-27{,}68\\-3{,}757\end{Bmatrix};$$

Вычисление усилий:

$$\left\{N_1^{л}\right\}=\left[k_1^{л}\right]\cdot\left\{\delta_1^{л}\right\}=\frac{EF}{a\sqrt{26}}\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}\cdot\frac{Pa}{EF}\begin{Bmatrix}94{,}79\\-75{,}32\end{Bmatrix}=P\begin{Bmatrix}-3{,}82\\3{,}82\end{Bmatrix};$$

$$\left\{N_2^{л}\right\}=\left[k_2^{л}\right]\cdot\left\{\delta_2^{л}\right\}=\frac{EF}{3a\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}\cdot\frac{Pa}{EF}\begin{Bmatrix}4{,}538\\0\end{Bmatrix}=P\begin{Bmatrix}1{,}07\\-1{,}07\end{Bmatrix};$$

$$\left\{N_3^{л}\right\}=\left[k_3^{л}\right]\cdot\left\{\delta_3^{л}\right\}=\frac{EF}{2a\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}\cdot\frac{Pa}{EF}\begin{Bmatrix}10{,}45\\0\end{Bmatrix}=P\begin{Bmatrix}3{,}70\\-3{,}70\end{Bmatrix};$$

$$\left\{N_4^{л}\right\}=\left[k_4^{л}\right]\cdot\left\{\delta_4^{л}\right\}=\frac{EF}{a\sqrt{10}}\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}\cdot\frac{Pa}{EF}\begin{Bmatrix}-70{,}06\\-58{,}85\end{Bmatrix}=P\begin{Bmatrix}-3{,}54\\3{,}54\end{Bmatrix};$$

$$\left\{N_5^{л}\right\}=\left[k_5^{л}\right]\cdot\left\{\delta_5^{л}\right\}=\frac{EF}{a\sqrt{10}}\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}\cdot\frac{Pa}{EF}\begin{Bmatrix}0\\-19{,}67\end{Bmatrix}=P\begin{Bmatrix}6{,}22\\-6{,}22\end{Bmatrix};$$

$$\left\{N_6^{л}\right\}=\left[k_6^{л}\right]\cdot\left\{\delta_6^{л}\right\}=\frac{EF}{a\sqrt{10}}\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}\cdot\frac{Pa}{EF}\begin{Bmatrix}0\\-7{,}971\end{Bmatrix}=P\begin{Bmatrix}2{,}52\\-2{,}52\end{Bmatrix};$$

$$\left\{N_7^{л}\right\}=\left[k_7^{л}\right]\cdot\left\{\delta_7^{л}\right\}=\frac{EF}{2a\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}\cdot\frac{Pa}{EF}\begin{Bmatrix}-27{,}68\\-3{,}76\end{Bmatrix}=P\begin{Bmatrix}-5{,}35\\5{,}35\end{Bmatrix}.$$

Сравнение результатов расчёта, выполненных МКЭ и в программе SCAD

№ КЭ	МКЭ	SCAD	Расхождение, %
1	3,819	3,820	0,026
2	-1,069	-1,060	0,84
3	-3,697	-3,710	0,35
4	3,543	3,560	0,48
5	-6,220	-6,250	0,48
6	-2,521	-2,530	0,36
7	5,350	5,370	0,37

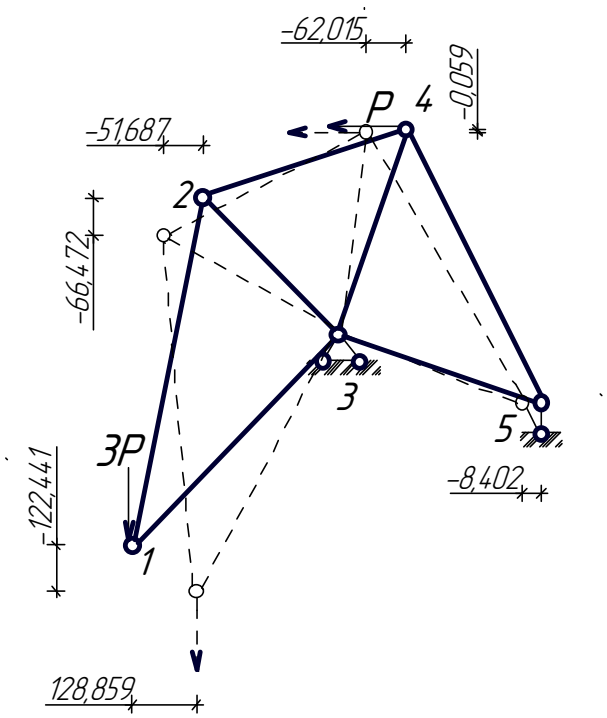


Рис.4. Схема перемещений.

ВЫВОД

Проверка полученных результатов показывает, что условия равновесия выполнены.

Характер перемещений узлов также соответствует представлению о поведении заданной расчётной схемы под действием сил, направленных вертикально и горизонтально.

Задача № 2 «Расчет плоской рамы методом конечных элементов»

СОДЕРЖАНИЕ:

Задание.....

1. Разработка схемы дискретизации.....

2. Обработка узлов дискретизации в глобальной системе координат.....

3. Формирование матриц жёсткости в глобальной системе координат.....

4. Формирование матрицы жёсткости для ансамбля конечных элементов в глобальной системе координат.....

5. Разрешающее уравнение метода.....

6. Формирование матрицы узловых перемещений конечных элементов в локальной системе координат.....

7. Вычисляем усилия в стержнях рамы.....

8. Проверка равновесия узлов рамы.....

Вывод.....

На рис.1 приведена ЗРС рамы.

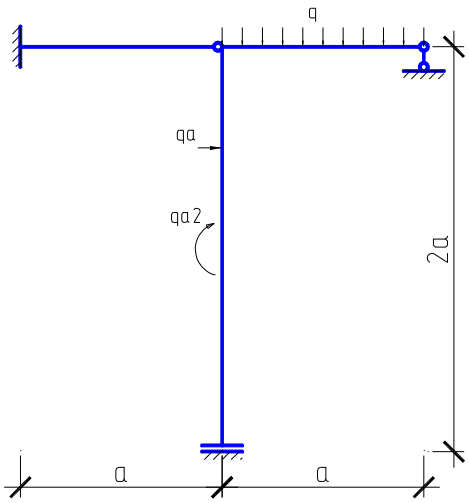


Рис.1. ЗРС рамы.

ЗАДАНИЕ

1. Определить перемещения узлов рамы и построить схему возможных перемещений.

2. Определить внутренние усилия в раме и построить эпюры изгибающих моментов, поперечных сил и продольных усилий.

3. Проверить равновесие рамы на произвольно отсеченной части.

РЕШЕНИЕ

1. Разработка схемы дискретизации.

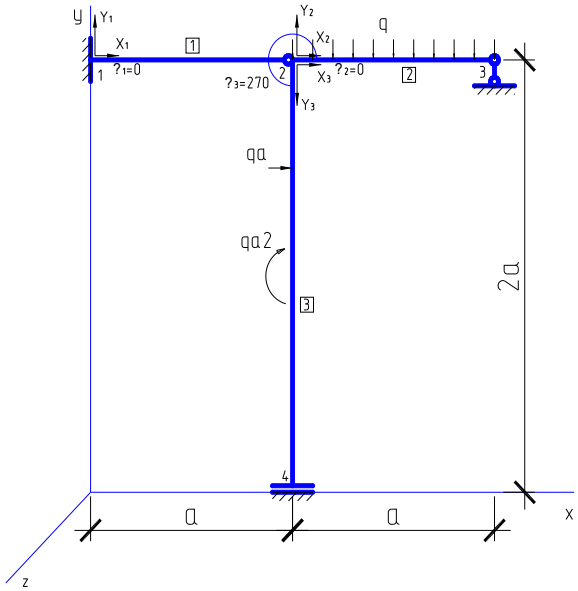


Рис.2. Схема дискретизации.

2. Обработка узлов дискретизации в глобальной системе координат.

Таблица 1

Координаты узлов дискретизации

№ узла	1	2	3	4
x, a	0	1	2	1
y, a	2	2	2	0

Определение вспомогательных величин проводят по формулам аналитической геометрии:

$$l_{ij} = \sqrt{\left(X_j - X_i\right)^2 + \left(Y_j - Y_i\right)^2};$$

$$\cos\varphi_{ij} = \frac{X_j - X_i}{l_{ij}};\ \sin\varphi_{ij} = \frac{Y_j - Y_i}{l_{ij}}.$$

Вычисления заносят в таблицу 2.

Таблица 2

Обработка узлов дискретизации

№ КЭ	i	j	l_k, а	sin φ_k	cos φ_k
1	1	2	1	0	1
2	2	3	1	0	1
3	2	4	2	-1	0

Матрицы преобразования имеют вид:

$$(p)_k = \begin{pmatrix} -\sin\varphi_k & 0 & 0 & 0 \\ \cos\varphi_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin\varphi_k & 0 \\ 0 & 0 & \cos\varphi_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(p)_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\quad (p)_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\quad (p)_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Формирование матриц жесткости в глобальной системе координат.
В локальной системе координат матрица жесткости:

$$\left[k_k^{л}\right] = \frac{E \cdot J}{l_k^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix};$$

$$[k_1^л]=\frac{2EJ}{(a)^3}\begin{bmatrix}12 & 6\cdot a & -12 & 6\cdot a\\ 6\cdot a & 4\cdot(a)^2 & -6\cdot a & 2\cdot(a)^2\\ -12 & -6\cdot a & 12 & -6\cdot a\\ 6\cdot a & 2\cdot(a)^2 & -6\cdot a & 4\cdot(a)^2\end{bmatrix}=\frac{4EJ}{a^3}\begin{bmatrix}6 & 3a & -6 & 3a\\ 3a & 2a^2 & -3a & a^2\\ -6 & -3a & 6 & -3a\\ 3a & a^2 & -3a & 2a^2\end{bmatrix};$$

$$[k_2^л]=\frac{2EJ}{(a)^3}\begin{bmatrix}12 & 6\cdot a & -12 & 6\cdot a\\ 6\cdot a & 4\cdot(a)^2 & -6\cdot a & 2\cdot(a)^2\\ -12 & -6\cdot a & 12 & -6\cdot a\\ 6\cdot a & 2\cdot(a)^2 & -6\cdot a & 4\cdot(a)^2\end{bmatrix}=\frac{4EJ}{a^3}\begin{bmatrix}6 & 3a & -6 & 3a\\ 3a & 2a^2 & -3a & a^2\\ -6 & -3a & 6 & -3a\\ 3a & a^2 & -3a & 2a^2\end{bmatrix};$$

$$[k_3^л]=\frac{EJ}{(2a)^3}\begin{bmatrix}12 & 6\cdot 2a & -12 & 6\cdot 2a\\ 6\cdot 2a & 4\cdot(2a)^2 & -6\cdot 2a & 2\cdot(2a)^2\\ -12 & -6\cdot 2a & 12 & -6\cdot 2a\\ 6\cdot 2a & 2\cdot(2a)^2 & -6\cdot 2a & 4\cdot(2a)^2\end{bmatrix}=\frac{EJ}{2a^3}\begin{bmatrix}3 & 3a & -3 & 3a\\ 3a & 4a^2 & -3a & 2a^2\\ -3 & -3a & 3 & -3a\\ 3a & 2a^2 & -3a & 4a^2\end{bmatrix};$$

2. Вычисление реакций на внутрипролетную нагрузку, приложенную к КЭ.

Из ЗРС видно:

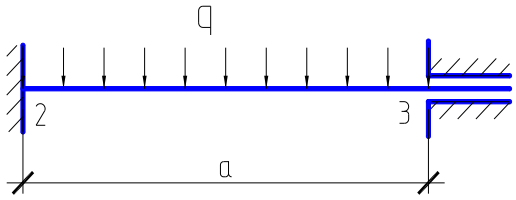
2.1. Ко второму КЭ приложена распределенная нагрузка. Обратившись к табличным эпюрам метода перемещений, можно определить значения элементов вектора реакций в виде:

$$\alpha = 1/12;$$

$$\gamma = 1/2;$$

$$M_1 = M_2 = \alpha q l^2 = \frac{1}{12} q a^2 = 0{,}08333 q a^2;$$

$$Q_1 = Q_2 = \gamma q l = \frac{1}{2} q a = 0{,}5 q a;$$



2.2. К третьему КЭ приложена сосредоточенная нагрузка. Обратившись к табличным эпюрам метода перемещений, можно определить значения элементов вектора реакций в виде:

$$\alpha = uv^2 = 0{,}25\cdot 0{,}75^2 = 0{,}1406;$$

$$\beta = vu^2 = 0{,}75\cdot 0{,}25^2 = 0{,}04688;$$

$$\gamma = v^2(1+2u) = 0{,}75^2(1+2\cdot 0{,}25) = 0{,}8438;$$

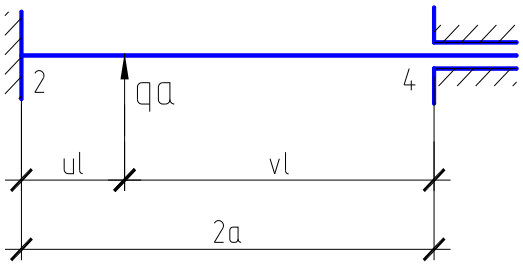
$$\delta = u^2(1+2v) = 0{,}25^2(1+2\cdot 0{,}75) = 0{,}1563;$$

$$M_1 = \alpha P l = 0{,}1406\cdot qa\cdot 2a = 0{,}2812 qa^2;$$

$$M_2 = \beta P l = 0{,}04688\cdot qa\cdot 2a = 0{,}09376 qa^2;$$

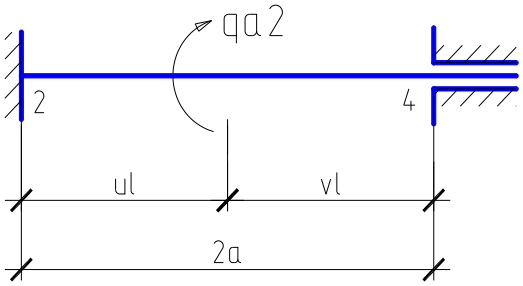
$$Q_1 = \gamma P = 0{,}8438 qa;$$

$$Q_2 = \delta P = 0{,}1563 qa;$$



2.3. К третьему КЭ приложен момент. Обратившись к табличным эпюрам метода перемещений, можно определить значения элементов вектора реакций в виде:

$$\alpha = v(2-3v) = 0{,}5\cdot(2-3\cdot 0{,}5) = 0{,}25;$$
$$\beta = u(2-3u) = 0{,}5\cdot(2-3\cdot 0{,}5) = 0{,}25;$$
$$\gamma = 6uv = 6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5 = 1{,}5;$$
$$M_1 = \alpha M = 0{,}25qa^2;$$
$$M_2 = \beta M = 0{,}25qa^2;$$
$$Q_1 = Q_2 = \gamma M / 2a = 1{,}5\cdot qa^2 / 2a = 0{,}75qa;$$



$$\{S^{л}_{q,1}\} = \begin{Bmatrix} Q^{л}_1 \\ M^{л}_1 \\ Q^{л}_2 \\ M^{л}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix};\ \{S^{л}_{q,2}\} = \begin{Bmatrix} Q^{л}_2 \\ M^{л}_2 \\ Q^{л}_3 \\ M^{л}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0{,}5qa \\ 0{,}08333qa^2 \\ 0{,}5qa \\ -0{,}08333qa^2 \end{Bmatrix};\ \{S^{л}_{q,3}\} = \begin{Bmatrix} Q^{л}_2 \\ M^{л}_2 \\ Q^{л}_4 \\ M^{л}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1{,}594qa \\ -0{,}5312qa^2 \\ 0{,}5937qa \\ -0{,}1562qa^2 \end{Bmatrix}.$$

3. Матрицы жесткости из локальной системы координат преобразовываются в глобальную систему координат по формуле:

$$\left[k^{Г}_k\right] = (p)_k \cdot \left[k^{л}_k\right] \cdot (p)^T_k.$$

$$\left[k^{Г}_1\right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{4EJ}{a^3} \begin{bmatrix} 6 & 3a & -6 & 3a \\ 3a & 2a^2 & -3a & a^2 \\ -6 & -3a & 6 & -3a \\ 3a & a^2 & -3a & 2a^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{4EJ}{a^3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3a & -6 & 3a \\ 3a & 2a^2 & -3a & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -3a & 6 & -3a \\ 3a & a^2 & -3a & 2a^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{4EJ}{a^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3a & 0 & -6 & 3a \\ 0 & 3a & 2a^2 & 0 & -3a & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -3a & 0 & 6 & -3a \\ 0 & 3a & a^2 & 0 & -3a & 2a^2 \end{bmatrix};$$

$$\left[k_2^{\Gamma}\right]=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\cdot\frac{4EJ}{a^3}\begin{bmatrix}6&3a&-6&3a\\3a&2a^2&-3a&a^2\\-6&-3a&6&-3a\\3a&a^2&-3a&2a^2\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{4EJ}{a^3}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\6&3a&-6&3a\\3a&2a^2&-3a&a^2\\0&0&0&0\\-6&-3a&6&-3a\\3a&a^2&-3a&2a^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}=$$

$$\frac{4EJ}{a^3}\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&6&3a&0&-6&3a\\0&3a&2a^2&0&-3a&a^2\\0&0&0&0&0&0\\0&-6&-3a&0&6&-3a\\0&3a&a^2&0&-3a&2a^2\end{bmatrix};$$

$$\left[k_3^{\Gamma}\right]=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\cdot\frac{EJ}{2a^3}\begin{bmatrix}3&3a&-3&3a\\3a&4a^2&-3a&2a^2\\-3&-3a&3&-3a\\3a&2a^2&-3a&4a^2\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{EJ}{2a^3}\begin{pmatrix}3&3a&-3&3a\\0&0&0&0\\3a&4a^2&-3a&2a^2\\-3&-3a&3&-3a\\0&0&0&0\\3a&2a^2&-3a&4a^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}=$$

$$\frac{EJ}{2a^3}\begin{bmatrix}3&0&3a&-3&0&3a\\0&0&0&0&0&0\\3a&0&4a^2&-3a&0&2a^2\\-3&0&-3a&3&0&-3a\\0&0&0&0&0&0\\3a&0&2a^2&-3a&0&4a^2\end{bmatrix};$$

4. Матрицы реакций на внутрипролетную нагрузку в глобальной системе координат:
$\{S^{\Gamma}_{q,1}\} = \{0\}$;

$$\{S^{\Gamma}_{q,2}\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0{,}5qa \\ 0{,}08333qa^2 \\ 0{,}5qa \\ -0{,}08333qa^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0{,}5 \\ 0{,}08333a \\ 0 \\ 0{,}5 \\ -0{,}08333a \end{Bmatrix} qa;$$

$$\{S^{\Gamma}_{q,3}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -1{,}594qa \\ -0{,}5312qa^2 \\ 0{,}5937qa \\ -0{,}1562qa^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1{,}594 \\ 0 \\ -0{,}5312a \\ 0{,}5937 \\ 0 \\ -0{,}1562a \end{Bmatrix} qa;$$

5. Формирование матрицы жесткости для ансамбля КЭ в ГСК.
Вектор перемещений.

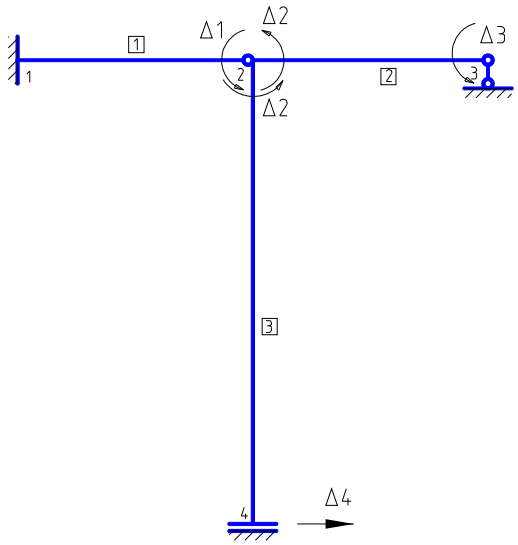
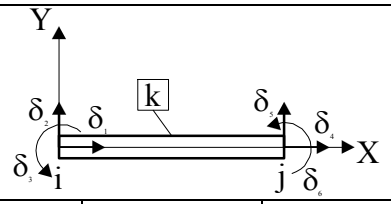


Рис.3. Векторы перемещений.

Таблица 3

Матрица индексов ансамбля КЭ

№ КЭ						
	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	δ_5	δ_6
1	0	0	0	0	0	1
2	0	0	2	0	0	3
3	0	0	2	4	0	0

Формирование матрицы жесткости.

Матрица жесткости ансамбля имеет размер 6х6 (по числу независимых перемещений в матрице индексов):

$$[K]=\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix}.$$

Матрица вычисляется по формулам:

$$K_{11}=k^{\Gamma}_{1,66}=\frac{4EJ}{a^3}\left(2a^2\right)=8a^2\frac{EJ}{a^3};$$

$$K_{12}=0;$$

$$K_{13}=0;$$

$$K_{14}=0;$$

$$K_{22}=k^{\Gamma}_{2,33}+k^{\Gamma}_{3,33}=\frac{4EJ}{a^3}\left(2a^2\right)+\frac{EJ}{2a^3}\left(4a^2\right)=10a^2\frac{EJ}{a^3};$$

$$K_{23}=k^{\Gamma}_{2,36}=\frac{4EJ}{a^3}\left(a^2\right)=4a^2\frac{EJ}{a^3};$$

$$K_{24}=k^{\Gamma}_{3,34}=\frac{EJ}{2a^3}(-3a)=-1{,}5a\frac{EJ}{a^3};$$

$$K_{33}=k^{\Gamma}_{2,66}=\frac{4EJ}{a^3}\left(2a^2\right)=8a^2\frac{EJ}{a^3};$$

$$K_{34}=0;$$

$$K_{44}=k^{\Gamma}_{3,44}=\frac{EJ}{2a^3}(3)=1{,}5\frac{EJ}{a^3};$$

6. Формирование вектора реакций на внутрипролетную нагрузку:

$$S_{q,1}=S^{\Gamma}_{q,1(6)}=0;$$

$$S_{q,2}=S^{\Gamma}_{q,2(3)}+S^{\Gamma}_{q,3(3)}=0{,}08333qa^2-0{,}5312qa^2=-0{,}4479qa^2;$$

$$S_{q,3}=S^{\Gamma}_{q,2(6)}=-0{,}08333qa^2;$$

$$S_{q,4}=S^{\Gamma}_{q,3(4)}=0{,}5937qa;$$

$$[S_q]=\begin{bmatrix} 0 \\ -0{,}4479a \\ -0{,}08333a \\ 0{,}5937 \end{bmatrix}qa.$$

Разрешающие уравнения метода.

$$-[K]\cdot\{\Delta\}-\{S_q\}+\{P\}=\{0\}.$$

$$\{P\}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\0\end{Bmatrix}qa.$$ - вектор внешних нагрузок.

$$-\frac{EJ}{a^3}\begin{bmatrix}8a^2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 10a^2 & 4a^2 & -1{,}5a\\ 0 & 4a^2 & 8a^2 & 0\\ 0 & -1{,}5a & 0 & 1{,}5\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}\Delta_1\\ \Delta_2\\ \Delta_3\\ \Delta_4\end{Bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\ -0{,}4479a\\ -0{,}08333a\\ 0{,}5937\end{bmatrix}qa+\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\0\end{Bmatrix}qa=\{0\}.$$

7. Решение СЛАУ.

$$\frac{EJ}{a^3}\begin{bmatrix}8a^2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 10a^2 & 4a^2 & -1{,}5a\\ 0 & 4a^2 & 8a^2 & 0\\ 0 & -1{,}5a & 0 & 1{,}5\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}\Delta_1\\ \Delta_2\\ \Delta_3\\ \Delta_4\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0{,}4479a\\ 0{,}08333a\\ -0{,}5937\end{bmatrix}qa.$$

$\Delta_1 = 0;$

$\Delta_2 = -0{,}02883qa^3 / EJ;$

$\Delta_3 = 0{,}02483qa^3 / EJ;$

$\Delta_4 = -0{,}4246qa^4 / EJ;$

8. Формирование матрицы узловых перемещений КЭ в ЛСК.

Так как перемещения в ЛСК связаны с перемещениями в ГСК, то потребуются составляющие векторов узловых перемещений в ГСК для каждого КЭ. Используя решение системы уравнений МКЭ с учетом данных таблицы индексов (табл.3), можно записать:

$$\{\delta_1^{Г}\}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\end{Bmatrix}\frac{qa^3}{EJ};\ \{\delta_2^{Г}\}=\begin{Bmatrix}0\\0\\-0{,}02883\\0\\0\\0{,}02483\end{Bmatrix}\frac{qa^3}{EJ};\ \{\delta_3^{Г}\}=\begin{Bmatrix}0\\0\\-0{,}02883\\-0{,}4246a\\0\\0\end{Bmatrix}\frac{qa^3}{EJ}.$$

$$\{\delta_1^{л}\}=(P)_1^T\cdot\{\delta_1^{Г}\}=0;$$

$$\{\delta_2^{л}\}=(P)_2^T\cdot\{\delta_2^{Г}\}=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}0\\0\\-0{,}02883\\0\\0\\0{,}02483\end{Bmatrix}\frac{qa^3}{EJ}=\frac{qa^3}{EJ}\begin{Bmatrix}0\\-0{,}02883\\0\\0{,}02483\end{Bmatrix};$$

$$\left\{\delta_3^{л}\right\}=\left(P\right)_3^T\cdot\left\{\delta_3^{Г}\right\}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}0\\0\\-0{,}02883\\-0{,}4246a\\0\\0\end{Bmatrix}\frac{qa^3}{EJ}=\frac{qa^3}{EJ}\begin{Bmatrix}0\\-0{,}02883\\-0{,}4246a\\0\end{Bmatrix}.$$

9. Вычисление усилий:

$$\left\{S^{л}\right\}=\left[k^{л}\right]\cdot\left\{\delta^{л}\right\}+\left\{S_q^{л}\right\};$$

$$\left\{S_1^{л}\right\}=\left[k_1^{л}\right]\cdot\left\{\delta_1^{л}\right\}=\frac{4EJ}{a^3}\begin{bmatrix}6&3a&-6&3a\\3a&2a^2&-3a&a^2\\-6&-3a&6&-3a\\3a&a^2&-3a&2a^2\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\0\end{Bmatrix}=0;$$

$$\left\{S_2^{л}\right\}=\left[k_2^{л}\right]\left\{\delta_2^{л}\right\}+\left\{S_{q,2}^{л}\right\}=\frac{4EJ}{a^3}\begin{bmatrix}6&3a&-6&3a\\3a&2a^2&-3a&a^2\\-6&-3a&6&-3a\\3a&a^2&-3a&2a^2\end{bmatrix}\frac{qa^3}{EJ}\begin{Bmatrix}0\\-0{,}02883\\0\\0{,}02483\end{Bmatrix}+$$

$$+\begin{Bmatrix}0{,}5qa\\0{,}08333qa^2\\0{,}5qa\\-0{,}08333qa^2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0{,}452\\-0{,}04799a\\0{,}548\\0\end{Bmatrix}qa;$$

$$\left\{S_3^{л}\right\}=\left[k_3^{л}\right]\cdot\left\{\delta_3^{л}\right\}+\left\{S_{q,3}^{л}\right\}=\frac{EJ}{2a^3}\begin{bmatrix}3&3a&-3&3a\\3a&4a^2&-3a&2a^2\\-3&-3a&3&-3a\\3a&2a^2&-3a&4a^2\end{bmatrix}\cdot\frac{qa^3}{EJ}\begin{Bmatrix}0\\-0{,}02883\\-0{,}4246a\\0\end{Bmatrix}$$

$$+\begin{Bmatrix}-1{,}594qa\\-0{,}5312qa^2\\0{,}5937qa\\-0{,}1562qa^2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-1{,}0\\0{,}04804a\\0\\0{,}4519a\end{Bmatrix}qa.$$

Деформированное состояние ЗРС, отвечающее полученному решению, приведено на рис.4.

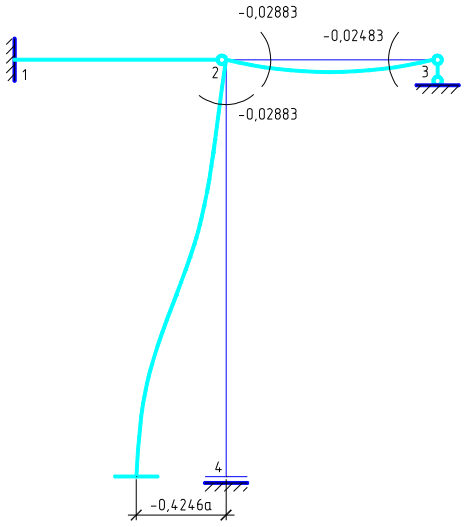


Рис.4. Схема перемещений.

На рис. 6 показан результат построения эпюр.

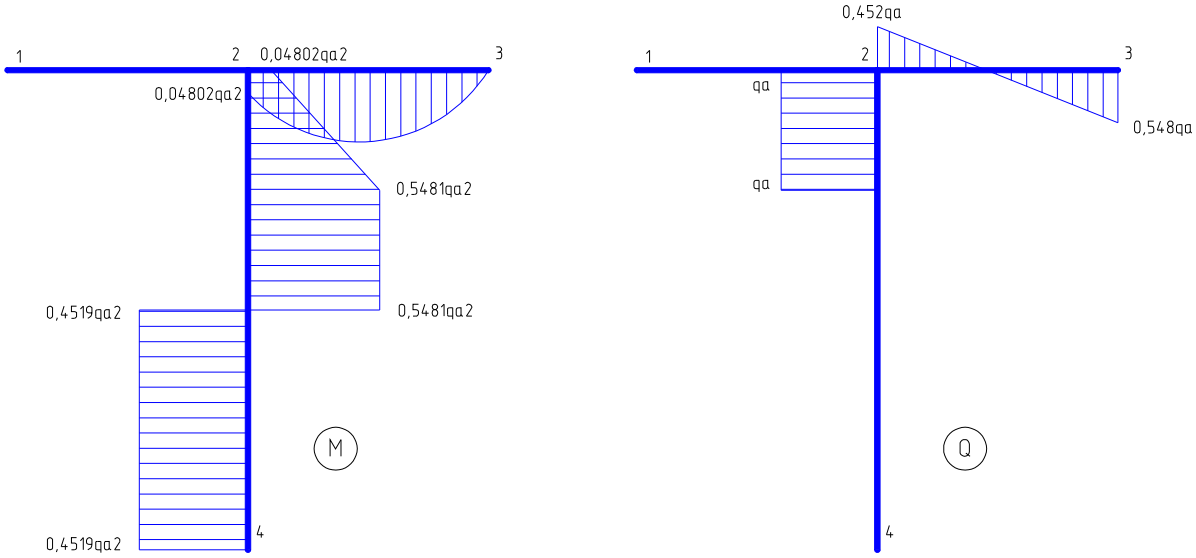
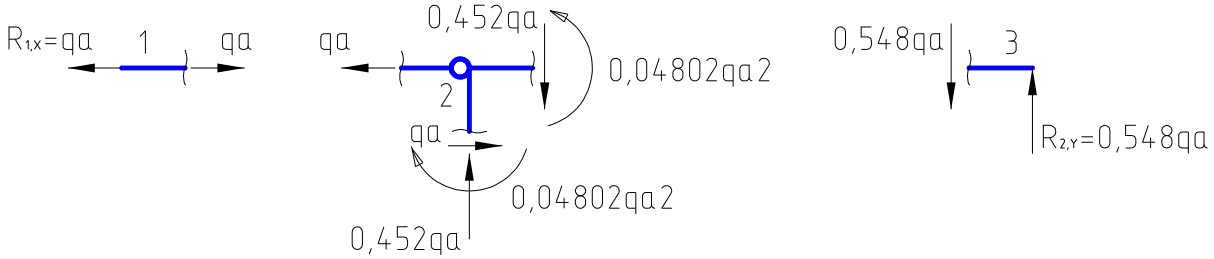
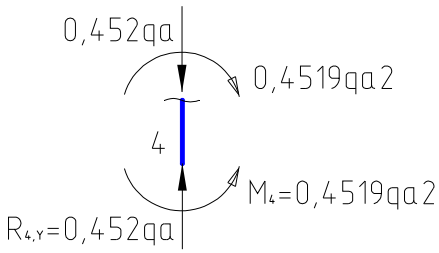
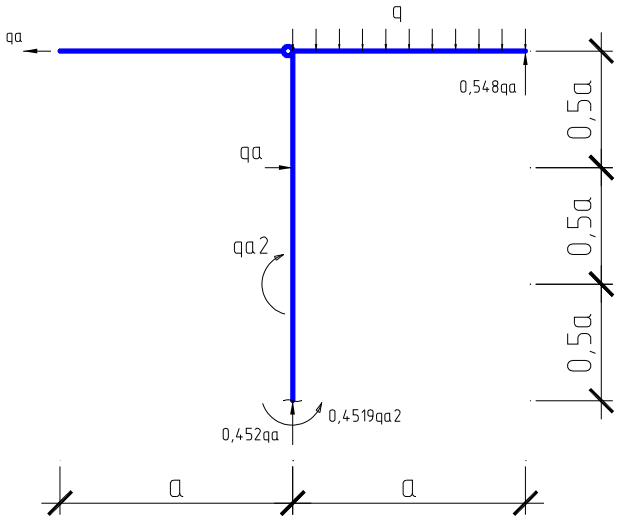


Рис.6.

10. Контроль проведенных построений осуществляется проверкой условий равновесия узлов ЗРС и ее произвольной части.







$$\sum X = -qa + qa = 0;$$
$$\sum Y = 0{,}452qa - q \cdot a + 0{,}548qa = 0;$$
$$\sum M_4 = qa \cdot 1{,}5a - q \cdot a^2 / 2 + 0{,}548qa \cdot a - qa \cdot a - qa^2 + 0{,}4519qa^2 = -0{,}0001;$$

ВЫВОД

Проверка полученных результатов показывает, что условия равновесия выполнены. Характер перемещений узлов также соответствует представлению о поведении ЗРС рамы под действием сил.